3 Divisibilidad

PROGRAMACIÓN DE LA UNIDAD

Objetivos

1. Reconocer la existencia o no de relación de divisibilidad entre dos números.
2. Conocer los conceptos de múltiplo y divisor de un número, su cálculo y sus propiedades.
3. Reconocer la existencia o no de una relación de divisibilidad entre dos números.
4. Conocer los criterios de divisibilidad para los números 2, 3, 5 y 11.
5. Distinguir si un número es primo o compuesto.
6. Reconocer si dos números son primos entre sí.
7. Realizar correctamente la descomposición factorial de un número compuesto.
8. Calcular el mínimo común múltiplo y el máximo común divisor de dos o más números.

Contenidos

Conceptos

- Múltiplo de un número: cálculo y aplicación. Múltiplos comunes, mínimo común múltiplo.
- Divisor de un número: cálculo y aplicación. Divisores comunes, máximo común divisor.
- Relación de divisibilidad. Criterios de divisibilidad.
- Propiedades de múltiplos y divisores de un número.
- Números primos y compuestos. Descomposición en factores de un número compuesto. Descomposición en factores primos de un número compuesto.
- Números primos entre sí.
- Múltiplos y divisores de un número a partir de su descomposición factorial.
- Mínimo común múltiplo y máximo común divisor a partir de la descomposición factorial de dos o más números.

Procedimientos

- Identificación de relaciones de divisibilidad entre dos números.
- Reconocimiento y cálculo de los múltiplos y divisores de un número.
- Utilización de los criterios de divisibilidad para deducir si un número es o no divisible por otro.
- Cálculos para comprobar si un número es primo o compuesto.
- Descomposición de un número en factores primos.
- Determinación del mínimo común múltiplo y el máximo común divisor de dos o más números.
- Elaboración y utilización de distintas estrategias para el cálculo del m.c.m. y del M.C.D.
- Resolución mental de problemas sencillos referentes a múltiplos y divisores y a la relación de divisibilidad.
- Resolución de problemas más complejos relativos al m.c.m. y el M.C.D.

Actitudes

- Sensibilidad, interés y valoración crítica ante las informaciones y mensajes relacionados con la divisibilidad.
- Curiosidad e interés por enfrentarse a problemas numéricos e investigar las relaciones entre números.
- Confianza en las propias capacidades para resolver problemas.
- Sensibilidad y gusto por la presentación ordenada y clara del proceso seguido en la resolución de problemas de divisibilidad.

Criterios de evaluación

1. Determinar si hay relación de divisibilidad entre dos números.
2. Calcular los múltiplos y divisores de un número dado.
3. Diferenciar entre los conceptos de múltiplo y divisor.
4. Reconocer cuándo un número es divisible entre otro o no. En concreto, discriminar si un número es divisible entre 2, 3, 5 y 11.
5. Determinar si un número es primo o compuesto y, en este último caso, saber descomponerlo en factores primos.
6. Diferenciar entre números primos y números primos entre sí.
7. Aplicar la descomposición factorial para hallar el mínimo común múltiplo y el máximo común divisor de varios números.
8. Utilizar los conceptos aprendidos en la resolución de sencillos problemas de divisibilidad.

Contenidos transversales

Educación del consumidor

Muchas de las actividades propuestas a lo largo de la unidad hacen referencia a aspectos económicos cuantitativos relativos al consumo de bienes o servicios, que requieren el uso correcto de múltiplos y divisores.

Educación para la paz

Se puede trabajar este tema transversal a partir de las actividades que hacen referencia la formación de equipos y al trabajo en equipo. Además, otras actividades sobre consumo pueden mover a la reflexión sobre el gasto consumista en nuestra sociedad en comparación con el dinero que se destina en la mayoría de los países a la educación y la salud pública.

COMPETENCIAS	CRITERIOS DE EVALUACIÓN	ACTIVIDADES
1. Matemática		
1.1. Utilizar el pensamiento matemático para interpretar y describir la realidad, así como para actuar sobre ella.	2, 7, 8	PD pág. 42, PD pág. 44 24, 28, 52-57, 72-74 EP28-EP35, EP37-EP45 EV10-EV12
1.2. Aplicar destrezas y desarrollar actitudes para razonar matemáticamente.	1, 2, 3, 4, 5, 7, 8	PD pág. 45, PD pág. 47, 2 PD pág. 48, PD pág. 50, PD pág. 52 1-14, 16-21, 25-27, 30-33, 35-51, 58, 61-68, 75-76 EP1-EP11, EP13-EP27 EV1-EV9
1.3. Comprender una argumentación matemática.	1, 2, 3, 4, 5, 6, 7	8, 15-16, 22, 29, 34, 43-44, 59-60 EP9, EP12, EP22
4. Comunicación lingüística		
4.1. Emplear el lenguaje matemático de forma oral y escrita para formalizar el pensamiento.	4, 5, 6	1.er PD pág. 48 8, 15, 22, 29, 59, 69-70
6. Autonomía e iniciativa personal		
6.1. Aplicar los procesos de resolución de problemas para planificar estrategias, asumir riesgos y controlar los procesos de toma de decisiones.	2, 7, 8	23, 27, 51, 75 ES1-ES6
7. Social y ciudadana		
7.2. Enfocar los errores cometidos en los procesos de resolución de problemas con espíritu constructivo, con el fin de valorar los puntos de vista ajenos en un plano de igualdad con los propios.	2, 7, 8	23, 59, 76 EP37-EP45
8. Aprender a aprender		
8.1. Desarrollar la curiosidad, la concentración, la perseverancia y la reflexión crítica.	2, 4, 5, 7, 8	15-16, 27, 34, 59-60, 71, 76 EP12

EP: Ejercicios y problemas. ES: Estrategias para resolver problemas. PD: Piensa y deduce. EV:Evaluación.

BIBLIOGRAFÍA

Chamoso, J. y Rawson, W.

A vueltas con los números. Madrid: Nivola, 2003.

Collantes, J. y Pérez, A.

Matecuentos cuentamates 2. Madrid: Nivola, 2005.

Corbalán, F.

Juegos matemáticos para Secundaria y Bachillerato. Madrid: Síntesis, 1998. (Educación Matemática en Secundaria.)

Dorce Polo, C.

Fermat y su teorema. Madrid: El rompecabezas, 2007.

González, P. M.

Pitágoras. El filósofo del número. Madrid: Nivola, 2001.

Sierra, M. (ed.)

Divisibilidad. Madrid: Síntesis. (Matemáticas: cultura y aprendizaje, 7.)

Torrecillas, B.

Fermat, el mago de los números. Madrid: Nivola, 1999.

PÁGINAS WEB

http://recursostic.educacion.es/descartes/web/

www.aulamatematica.com/ESO2/PDF_SOLO/E2_SOLO_MCD_mcm.pdf

www.amolasmates.es/segundo%20eso/mat2eso1.html

RECUERDA Y RESUELVE
página 41

1. Relación de divisibilidad
página 42

2. Múltiplos y divisores
página 43
RA 1 (R)   AC 1

3. Múltiplos de un número
página 44

4. Divisores de un número
página 45
RA 2 (R)

5. Criterios de divisibilidad
página 46
RA 3 (R)   AC 2

6. Números primos y compuestos
página 47
RA 4 (A)

7. Descomposición factorial de un número
páginas 48/49
RA 5 (R)   AC 3

8. Múltiplos comunes y mínimo común múltiplo (m.c.m.)
páginas 50/51
RA 6 (R)   AC 4

8.1. Obtención del mínimo común múltiplo
páginas 50/51

9. Divisores comunes y máximo común divisor (M.C.D.)
páginas 52/53
RA 7 (R)   AC 4

9.1. Obtención del máximo común divisor
páginas 52/53

ESTRATEGIAS
página 54

EJERCICIOS Y PROBLEMAS
páginas 55/57
RA 8 (A)

EVALUACIÓN
página 57
AC 5

RA → Refuerzo (R) y ampliación (A)
AC → Adaptación curricular

1. Relación de divisibilidad (página 42)

El cálculo de múltiplos y divisores se basa en la relación de divisibilidad, que debe resultar un concepto fácil de entender por los alumnos. Servirá, además, para repasar la división y, por lo tanto, las tablas de multiplicación.

2. Múltiplos y divisores (página 43)

Los conceptos de múltiplo y divisor aparecerán continuamente en las matemáticas de ESO y de Bachillerato: resolución de problemas basados en el m.c.m y M.C.D., operaciones con fracciones, resolución de ecuaciones,… Por ello, es fundamental que los alumnos comprendan estos dos conceptos y, sobre todo, que no los intercambien, y en esto inciden las actividades propuestas en este epígrafe.

3. Múltiplos de un número (página 44)

Este epígrafe no presenta grandes dificultades de comprensión, pero es importante que el alumno entienda que los múltiplos de un número natural son infinitos. Igualmente, hay que insistir en que el 0 es el único número que sólo tiene un múltiplo.

4. Divisores de un número (página 45)

Hay que insistir en que hallar los divisores de un número natural significa determinar todos sus divisores, no basta con establecer unos pocos, y en que siempre hay que incluir como divisores la unidad y el propio número. Conviene hacer ver al alumno que aunque un número natural tiene infinitos múltiplos, sin embargo, solo tiene un número finito de divisores, mayor o menor, pero finito.

5. Criterios de divisibilidad (página 46)

En este epígrafe se recuerdan los criterios de divisibilidad por 2, 3, 5 y 11, que ya deberían ser conocidos por los alumnos y que serán necesarios posteriormente para la descomposición en factores primos.

No se incluyen los criterios de divisibilidad por 9 y 10, dado que en ocasiones esto confunde al alumno y le lleva a pensar que se trata de dos números primos.

Conviene estar atento ante el error frecuente entre los alumnos de considerar que los números pares son divisibles por 2, y los impares, por 3. Con objeto de evitar esta posible confusión, se pueden poner varios ejemplos de números pares divisibles por 3, y de números impares no divisibles por 3.

6. Números primos y compuestos (página 47)

Es necesario que el alumno aprenda y sepa reconocer inmediatamente al menos los números primos menores que 25.

Para comprobar si un número mayor que 25 es primo, habrá que hacer los cálculos necesarios y advertir a los alumnos del error que pueden cometer al pensar que un número es primo porque no es divisible por 2, 3 o 5, sin comprobar si es divisible por algún número primo mayor. Esto debe quedar suficientemente claro, ya que la diferencia entre número primo y número compuesto es fundamental en los contenidos que siguen.

7. Descomposición factorial de un número (páginas 48/49)

Se debe hacer hincapié en que los factores que forman la descomposición de un número deben ser primos. Los alumnos suelen confundirse e incluir el 4, el 6 y, sobre todo, el 9 en la descomposición en factores primos. Es importante que los alumnos aprendan el procedimiento de descomponer un número en factores primos de forma ordenada, probando primero con el 2 como posible factor primo, luego con el 3, con el 5, etcétera.

Se recomienda al profesor que destaque en clase la unicidad de la descomposición en factores primos.

8. Múltiplos comunes y mínimo común múltiplo (m.c.m.) (páginas 50/51)

8.1. Obtención del mínimo común múltiplo (páginas 50/51)

Este subepígrafe, con el 9.1 que se refiere al cálculo del máximo común divisor, son los que más dificultad presentan para los alumnos, al abordar un asunto que no es tan intuitivo e inmediato como el resto de conceptos de la unidad.

Es conveniente realizar todas las actividades de este epígrafe con objeto de practicar y asimilar el método de cálculo, pues se trata de conceptos básicos que aparecerán continuamente a lo largo de las siguientes unidades y en los próximos cursos.

9. Divisores comunes y máximo común divisor (M.C.D.) (páginas 52/53)

Es muy importante que el alumno sepa distinguir los números primos de los números primos entre sí. Se puede recordar que, si dos números son primos, entonces serán primos entre sí (por ejemplo, 7 y 11), mientras que lo contrario no es cierto. Con este fin, el profesor puede plantear más ejemplos de ambos casos.

9.1. Obtención del máximo común divisor (páginas 52/53)

Es conveniente realizar todas las actividades de este epígrafe con objeto de practicar y asimilar el método de cálculo, pues se trata de conceptos básicos que aparecerán continuamente a lo largo de las siguientes unidades y en los próximos cursos.

Una vez visto los procedimientos de cálculo de mínimo común múltiplo y máximo común divisor, a los alumnos les cuesta entender por qué, para calcular el mínimo común múltiplo, se eligen los factores comunes y no comunes, mientras que, en el caso del máximo común divisor solo se toman los comunes. Tampoco acaban de comprender por qué se eligen los exponentes mayores de los factores para el mínimo común múltiplo y, sin embargo, para el máximo común divisor se seleccionan los menores. Por ello, es conveniente no explicar el método para el cálculo del mínimo común múltiplo y del máximo común divisor exclusivamente como una «receta» que hay que memorizar; por el contrario, hay que hacer ver al alumno por qué se hace lo que la «receta» dice. Es recomendable hacer uso de las situaciones de los ejercicios resueltos antes de plantear el algoritmo del cálculo, e incluso plantear otras similares para que el alumno las resuelva antes de darle la «receta».

Preguntas de diagnóstico

Página 40

En la tienda de especias de un zoco marroquí venden bolsas de 50 gramos de una mezcla especial para un plato de cuscús y bolsas de 20 gramos de menta para el té.

a) ¿Es posible comprar 100 gramos de las bolsas de menta? ¿Y 50 gramos?

Es posible comprar 100 gramos de menta, pero no 50 gramos.

b) ¿Podemos comprar 80 gramos del preparado para cuscús? ¿Y 150 gramos?

Podemos comprar 150 gramos de cuscús, pero no 80 gramos.

c) Piensa cómo podríamos llevarnos la misma cantidad de preparado para cuscús y de menta. ¿Hay más de una posibilidad?

Podríamos llevar 100 gramos de cada uno, o 200 gramos, 300 gramos,…

Recuerda y resuelve

Página 41

1. Escribe una multiplicación cuyos factores sean 4 y 11.

$44 = 4 \cdot 11$

2. Indica cuáles son los factores y cuál es el producto de la operación $6 \cdot 4 = 24$.

Factores: 6 y 4. Producto: 24

3. Indica el dividendo, el divisor y el resto de las siguientes divisiones:

a) 15 : 4

Dividendo: 15; Divisor: 4; Resto: 3

b) 32 : 8

Dividendo: 32; Divisor: 8; Resto: 0

c) 123 : 6

Dividendo: 123; Divisor: 6; Resto: 3

d) 270 : 18

Dividendo: 270; Divisor: 18; Resto: 0

4. En una división, el dividendo es 20 y el divisor es 4. Calcula el cociente y el resto.

Cociente: 5. Resto: 0.

5. Indica cuáles de las siguientes divisiones son exactas y escribe la relación entre sus términos:

a) 15 : 4

No es exacta: $15 = 4 \cdot 3 + 3$

b) 32 : 8

Sí es exacta: $32 = 8 \cdot 4$

c) 123 : 6

No es exacta: $123 = 6 \cdot 20 + 3$

d) 270 : 18

Sí es exacta: $270 = 18 \cdot 15$

6. Completa en tu cuaderno la relación entre los términos de las siguientes divisiones exactas:

a) 1 750 : 125 = 14 ▶ **$1\,750 = 125 \cdot 14$**

b) 105 300 : 230 = 450 ▶ **$105\,300 = 230 \cdot 450$**

7. Averigua cuáles son las divisiones exactas que se obtienen con los términos de las siguientes multiplicaciones:

a) $7 \cdot 19 = 133$

133: 7 = 19; 133: 19 = 7

b) $15 \cdot 68 = 1\,020$

1 020: 15 = 68; 1 020: 68 = 15

8. Completa en tu cuaderno estas operaciones:

a) $12 \cdot \_\_\_\_\_\_ = 240$

$12 \cdot 20 = 240$

b) $123 \cdot \_\_\_\_\_\_ = 5\,535$

$123 \cdot 45 = 5\,535$

9. Escribe en tu cuaderno estas multiplicaciones en forma de potencia:

a) $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$

3^4

b) $2 \cdot 2 \cdot 2$

2^3

10. Calcula el valor de las siguientes potencias:

a) 3^2

9

b) 2^3

8

c) 5^2

25

11. Calcula el valor de estas expresiones:

a) $2^2 \cdot 3$

12

b) $2 \cdot 3^2 \cdot 5$

90

c) $2^2 \cdot 3 \cdot 5^2$

300

1. Relación de divisibilidad

Página 42

Piensa y deduce

La clase de 1.° A tiene 20 alumnos, y la de 1.° B, 22 alumnos. La profesora de Educación Física quiere formar equipos de 5 jugadores para que todos puedan jugar a la vez a baloncesto.

a) ¿Puede hacerlo en las dos clases?

La profesora de Educación Física puede formar equipos de 5 alumnos en 1.° A sin que ningún alumno se quede sin equipo. Sin embargo, en 1.° B, quedan dos alumnos sin equipo.

b) ¿Qué requisito tiene que cumplir el número de alumnos de una clase para que se puedan formar equipos de 5 jugadores?

El número de alumnos de la clase debe contener a 5 una cantidad exacta de veces.

1 ● Realiza la división y deduce como en el ejemplo:

Ejemplo: $\begin{array}{r|l} 32 & 7 \\ \hline 4 & 4 \end{array}$ $\Rightarrow$ 32 no es divisible por 7.

a) $\begin{array}{r|l} 90 & 18 \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{5} \end{array}$ $\Rightarrow$ **90 es divisible por 18**

b) $\begin{array}{r|l} 543 & 45 \\ \hline \mathbf{93} & \mathbf{12} \\ \mathbf{3} & \end{array}$ $\Rightarrow$ **543 no es divisible por 45**

c) $\begin{array}{r|l} 7\,480 & 340 \\ \hline \mathbf{680} & \mathbf{22} \\ \mathbf{0} & \end{array}$ $\Rightarrow$ **7 480 es divisible por 340**

2 ● Indica si entre los pares de números dados hay relación de divisibilidad:

a) 14 y 28   *c)* 104 y 4   *e)* 1 050 y 46

b) 15 y 5   *d)* 244 y 12   *f)* 3 515 y 95

Hay relación de divisibilidad en: *a, b, c* y *f*.

3 ● Di si estas afirmaciones son verdaderas o falsas:

a) El 24 es divisible por 8.

Verdadera.

b) 54 es divisible por 6.

Verdadera.

c) 40 es divisible por 10.

Verdadera.

d) El 9 es divisible por 6.

Falsa.

4 ●● Agrupa los números dados formando cuatro parejas en las que haya relación de divisibilidad: 32, 45, 8, 15, 22, 14, 7, 11

32 y 8; 45 y 15; 22 y 11; 14 y 7

2. Múltiplos y divisores

Página 43

5 ● Indica verdadero o falso:

a) 24 es múltiplo de 6.

Verdadera.

b) 2 es divisor de 8.

Verdadera.

c) 14 es divisor de 7.

Falsa.

d) 15 es múltiplo de 5.

Verdadera.

e) 3 es divisor de 20.

Falsa.

f) 18 es divisor de 9.

Falsa.

g) 7 es divisor de 22.

Falsa.

h) 24 es múltiplo de 3.

Verdadera.

6 ●● A partir de la división 28 : 7 = 4, escribe y completa estas expresiones en tu cuaderno:

a) El 28 es **múltiplo** de 7.

b) El 7 es **divisor** de 28.

c) El **28** es igual a **4** por 7.

7 ● Escribe y completa en tu cuaderno las siguientes frases con las palabras «múltiplo» o «divisor»:

a) El 7 es **divisor** de 14. ⇔ El 14 es **múltiplo** de 7.

b) El 12 es **múltiplo** de 6. ⇔ El 6 es **divisor** de 12.

c) El 6 es **múltiplo** de 3. ⇔ El 3 es **divisor** de 6.

d) El 3 es **divisor** de 18. ⇔ El 18 es **múltiplo** de 3.

8 ●●● Sabiendo que *a* es divisible por *b*, indica si estas afirmaciones son verdaderas o falsas; razona tu respuesta:

a) El número *a* es divisor de *b*.

Falsa.

b) El número *a* es múltiplo de *b*.

Verdadera.

c) El número *b* es un múltiplo de *a*.

Falsa.

d) El número *b* es un divisor de *a*.

Verdadera.

e) La división $b : a$ es exacta.

Falsa.

f) La división $a : b$ es exacta.

Verdadera.

3. Múltiplos de un número

Página 44

Piensa y deduce

En un supermercado están de oferta los yogures que vienen en packs de 8 unidades. ¿Cuáles son las diferentes cantidades de yogures que te puedes llevar según el número de packs que compres?

Sea cual sea la cantidad de yogures que compres, siempre podrás hacer grupos de 8 yogures. Todas esas cantidades son múltiplos de 8.

1 pack: 8 yogures ▶ 8 es 1 vez 8 ▶ $8 \cdot 1 = 8$

2 packs: 16 yogures ▶ 16 es 2 veces 8 ▶ $8 \cdot 2 = 16$

3 packs: 24 yogures ▶ 24 es 3 veces 8 ▶ $8 \cdot 3 = 24$

4 packs: 32 yogures ▶ 32 es 4 veces 8 ▶ $8 \cdot 4 = 32$

Podríamos seguir comprando packs sin parar y obtendríamos infinitos múltiplos de 8.

9 ● Añade tres términos más en cada serie:

a) $M(3) = 3, 6, 9, 12, \ldots$

15, 28, 21

b) $M(6) = 6, 12, 18, \ldots$

21, 24, 27

c) $M(30) = 30, 60, 90, 120, \ldots$

150, 180, 210

10 ● Contesta las preguntas. Justifica tus respuestas afirmativas con una multiplicación y el resto con una división.

a) ¿Es 12 múltiplo de 6?

Sí, $12 = 6 \cdot 2$

b) ¿Es 45 múltiplo de 9?

Sí, $45 = 9 \cdot 5$

c) ¿Es 33 múltiplo de 7?

No, $33 = 7 \cdot 4 + 5$

d) ¿Es 1 260 múltiplo de 28?

Sí, $1\,260 = 28 \cdot 45$

11 ● Calcula los cinco primeros múltiplos de los siguientes números:

a) 5

5, 10, 15, 20, 25

b) 7

7, 14, 21, 28, 35

c) 12

12, 24, 36, 48, 60

d) 10

10, 20, 30, 40, 50

12 ●● Escribe en tu cuaderno:

a) Los cinco primeros múltiplos de 12 mayores que 282.

288, 300, 312, 324 y 336

b) Los múltiplos de 3 comprendidos entre 40 y 55.

42, 45, 48, 51 y 54

c) El primer número mayor que 100 que es múltiplo de 4 y 6.

108

13 ● Explica de forma clara por qué 168 es múltiplo de 12 y por qué 47 no es múltiplo de 6.

168 es múltiplo de 12, ya que $168 = 12 \cdot 14$.

47 no es múltiplo de 6, ya que $47 = 6 \cdot 7 + 5$.

14 ●● ¿Cuál es la diferencia entre dos múltiplos consecutivos de 12? ¿Y de 27?

La diferencia entre dos múltiplos consecutivos de cualquier número es el propio número. Por tanto, la diferencia entre dos múltiplos consecutivos de 12 es 12, y de 27 es 27.

15 ●●● Un número, *b*, es múltiplo de otro, *a*, y, a su vez, otro número, *c*, es múltiplo de *b*. ¿Se puede asegurar que *c* es múltiplo de *a*?

Sea $b = a \cdot m$ y $c = b \cdot n$. Entonces, $c = a \cdot m \cdot n = a \cdot (m \cdot n)$.

Por lo tanto, *c* es múltiplo de *a*.

16 ●●● Utiliza la calculadora para averiguar el primer múltiplo de 24 mayor que 2 300. ¿Cómo lo has hecho?

Como 2 300 : 24 = 95,83, entonces, el primer múltiplo de 24 mayor que 2 300 es $24 \cdot 96 = 2\,304$.

4. Divisores de un número

Página 45

Piensa y deduce

Observa las siguientes divisiones:

$$\begin{array}{r|l} 15 & 3 \\ \hline 0 & 5 \end{array} \quad \text{y} \quad \begin{array}{r|l} 15 & 5 \\ \hline 0 & 3 \end{array}$$

Por tanto, 3 y 5 son divisores de 15.

a) Si en una división exacta intercambiamos entre sí el divisor y el cociente, ¿se obtiene otra división exacta?

Sí, pues en una división exacta el dividendo es igual al divisor por el cociente y la división será exacta dividiendo por cualquiera de ellos.

b) Fíjate en esta otra división:

$$\begin{array}{r|l} 120 & 8 \\ \hline 40 & 15 \\ 0 & \end{array}$$

¿Puedes asegurar que 8 y 15 son divisores de 120?

Sí, porque la división es exacta.

17 ● Escribe y completa en tu cuaderno las frases:

a) 12 : 6 = 2 ⇒ El **6** y el **2** son divisores de **12**.

b) 8 : 2 = 4 ⇒ El **2** y el **4** son divisores de **8**.

c) 48 : 8 = 6 ⇒ El **8** y el **6** son divisores de **48**.

18 ● Contesta las siguientes cuestiones y justifica tu respuesta con una división:

a) ¿Es 7 divisor de 42?

Sí; 7 es divisor de 42, ya que 42 : 6 = 7.

b) ¿Es 9 divisor de 27?

Sí; 9 es divisor de 27, ya que 27 : 9 = 3.

c) ¿Es 6 divisor de 14?

No; 6 no es divisor de 14, ya que $14 = 6 \cdot 2 + 2$

d) ¿Es 18 divisor de 216?

Sí; 18 es divisor de 216, ya que 216 : 18 = 12.

e) ¿Es 212 divisor de 14?

No; 14 no es divisor de 212, ya que $212 = 14 \cdot 15 + 2$

f) ¿Es 9 divisor de 1 080?

Sí; 9 es divisor de 1 080, ya que 1 080 : 9 = 120.

19 ● De los números 3, 7, 10, 8, 2, 1, 12, 6, 24, indica cuáles son divisores de 12.

3, 2, 1, 12 y 6

20 ● Calcula los divisores de cada número:

a) 4

$D(4) = \{1, 2, 4\}$

b) 40

$D(40) = \{1, 2, 4, 5, 8, 10, 20, 40\}$

c) 12

$D(12) = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$

d) 60

$D(60) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60\}$

e) 18

$D(18) = \{1, 2, 3, 6, 9, 18\}$

f) 84

$D(84) = \{1, 2, 3, 4, 6, 7, 12, 14, 21, 28, 42, 84\}$

g) 11

$D(11) = \{1, 11\}$

h) 110

$D(110) = \{1, 2, 5, 10, 11, 22, 55, 110\}$

21 ●● Calcula mentalmente:

a) $D(8)$

$D(8) = \{1, 2, 4, 8\}$

b) $D(14)$

$D(14) = \{1, 2, 7, 14\}$

c) $D(10)$

$D(10) = \{1, 2, 5, 10\}$

d) $D(36)$

$D(36) = \{1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36\}$

22 ●● ¿Se puede asegurar que cualquier número natural tiene al menos dos divisores?

Sí, cualquier número natural tiene como divisores al menos a 1 y a sí mismo.

23 ●● En un campamento hay 60 participantes. Encuentra todas las formas posibles de hacer equipos con el mismo número de componentes sin que se quede ningún participante sin equipo.

Para hacer equipos con el mismo número de componentes y que no se quede ningún participante sin equipo, necesitamos equipos cuyo número de componentes sea divisor de 60. Así tenemos la posibilidad de hacer:

- **2 equipos de 30 componentes o 30 equipos de 2 componentes**
- **3 equipos de 20 componentes o 20 equipos de 3 componentes**
- **4 equipos de 15 componentes o 15 equipos de 4 componentes**
- **5 equipos de 12 componentes o 12 equipos de 5 componentes**
- **6 equipos de 10 componentes o 10 equipos de 6 componentes**

5. Criterios de divisibilidad

Página 46

24 ● Indica si los siguientes números son divisibles por 2, 3, 5 y 11:

a) 18 *b)* 45 *c)* 120 *d)* 845 *e)* 1 320

Son divisibles por 2: 18, 120 y 1 320.

Son divisibles por 3: 18, 45, 120 y 1 320.

Son divisibles por 5: 45, 120, 845 y 1 320.

Son divisibles por 11: 1 320.

25 ●● En tu cuaderno, añade una cifra para que se cumpla la condición dada. Da todas las soluciones posibles.

a) 120 ⇒ Es múltiplo de 2 y de 5.

b) 135 ⇒ Es múltiplo de 3, pero no de 2.

c) 411, 441 y 471 ⇒ Es divisible por 3.

d) 4 631 ⇒ Es divisible por 11.

e) 636 ⇒ Es divisible por 3 y por 2 y no por 5.

26 ●● Halla:

a) Un número de tres de cifras que sea divisible por 2 y por 3.

312

b) Un número de cinco cifras que sea divisible por 5 y por 3, pero no por 2.

11 115

c) Un múltiplo de 11 de cuatro cifras.

1 144

27 ●●● El número 1452 es múltiplo de 11. Obtén otro múltiplo de 11 cambiando el orden de las cifras. ¿Cuántas soluciones hay?

1 254; 5 412; 5 214; 4 125; 4 521; 2 541; 2 145

28 ●●● Marta ha vendido papeletas de 3 € para una rifa. Al contar el dinero recaudado, comprueba que tiene 124 €. ¿Por qué sabe, sin hacer ninguna división, que le falta o le sobra dinero?

124 no es divisible por 3 porque 1 + 2 + 4 = 7

29 ●●● Escribe un criterio de divisibilidad para los números divisibles por 10 y otro para los divisibles por 100.

Para 10: Si su última cifra es 0.

Para 100: Si sus dos últimas cifras son 0.

6. Números primos y compuestos

Página 47

Piensa y deduce

Clasifica los 30 primeros números naturales, excepto el 1, en dos grupos:

- Los que tienen solo dos divisores.
- Los que tienen más de dos.

Tienen dos divisores: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29

Tiene más de dos divisores: 4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 16, 18, 20, 21, 22, 24, 25, 26, 27, 28, 30

¿Cuáles son los divisores de los números que solo tienen dos divisores?

Los divisores de los que solo tienen dos divisores son el 1 y el propio número.

30 ● Clasifica en números primos y compuestos:

2, 7, 45, 11, 80, 23, 39, 5, 37, 67, 93, 9, 17

Primos: 2, 7, 11, 23, 5, 37, 67 y 17 **Compuestos: 45, 80, 39, 93 y 9**

31 ● Indica cuáles son compuestos expresándolos con una multiplicación:

a) 113

Primo

b) 143

Compuesto: $143 = 11 \cdot 13$

c) 282

Compuesto: $282 = 141 \cdot 2$

d) 352

Compuesto: $352 = 11 \cdot 32$

e) 387

Compuesto: $387 = 3 \cdot 129$

32 ●● De los números 622, 705, 3 179, 177 y 2 099 averigua cuál es primo.

Es primo 2 099.

33 ● ¿Puede ser primo un número par distinto de 2?

Un número par distinto de 2 no puede ser primo, porque todos los números pares son divisibles por 2.

34 ●●● ¿Cuántos divisores tiene un número que es el producto de dos números primos?

Un número que es producto de dos números primos tiene cuatro divisores: el 1, los dos números primos que forman el producto y el propio número resultado del producto.

7. Descomposición factorial

Página 48

Piensa y deduce

¿De qué depende que un número se pueda expresar como un producto en el que no se utilice el propio número?

Los números compuestos se pueden expresar en forma de producto sin utilizar el propio número como factor de la multiplicación. Sin embargo, los números primos solo se pueden expresar en forma de producto utilizando el propio número como factor de la multiplicación.

Piensa y deduce

Vamos a descomponer en factores el número 90:

$90 = 3 \cdot 30 = 3 \cdot 3 \cdot 10 = 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 2$

a) Al llegar a $90 = 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 2$, ¿puedes seguir descomponiendo en más factores? ¿Por qué?

Porque los factores que me quedan son primos y no los puedo expresar como la multiplicación de otros dos números.

b) Haz la descomposición partiendo de $90 = 2 \cdot 45$. ¿Obtienes el mismo resultado?

$\mathbf{90 = 2 \cdot 45 = 2 \cdot 5 \cdot 9 = 2 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 3}$

Sí, se llega a la misma descomposición.

Página 49

35 ● Escribe los números indicados como un producto que contenga los factores que se indican:

a) 144 en dos factores.
$\mathbf{144 = 12 \cdot 12}$

b) 90 en cuatro factores.
$\mathbf{90 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5}$

c) 27 en tres factores.
$\mathbf{27 = 3 \cdot 3 \cdot 3}$

d) 60 en tres factores.
$\mathbf{60 = 2 \cdot 3 \cdot 10}$

36 ● Descompón los siguientes números en dos factores, luego en tres, y así sucesivamente, hasta obtener todos los factores primos:

a) 24
$\mathbf{24 = 2 \cdot 12 = 2 \cdot 2 \cdot 6 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3}$

b) 60
$\mathbf{60 = 2 \cdot 30 = 2 \cdot 2 \cdot 15 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5}$

c) 260
$\mathbf{260 = 2 \cdot 130 = 2 \cdot 2 \cdot 65 = 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 13}$

d) 450
$\mathbf{450 = 2 \cdot 225 = 2 \cdot 3 \cdot 75 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 25 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5}$

37 ● Descompón en factores primos:

a) 18 — $\mathbf{18 = 2 \cdot 3^2}$
b) 20 — $\mathbf{20 = 2^2 \cdot 5}$
c) 36 — $\mathbf{36 = 2^2 \cdot 3^2}$
d) 70 — $\mathbf{70 = 2 \cdot 5 \cdot 7}$
e) 108 — $\mathbf{108 = 2^2 \cdot 3^3}$
f) 130 — $\mathbf{130 = 2 \cdot 5 \cdot 13}$
g) 252 — $\mathbf{252 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 7}$
h) 660 — $\mathbf{660 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 11}$
i) 675 — $\mathbf{675 = 3^3 \cdot 5^2}$
j) 1 100 — $\mathbf{1\,100 = 2^2 \cdot 5^2 \cdot 11}$
k) 900 — $\mathbf{900 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2}$
l) 2 184 — $\mathbf{2\,184 = 2^3 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 13}$
m) 1 530 — $\mathbf{1\,530 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 17}$
n) 2 457 — $\mathbf{2\,457 = 3^3 \cdot 7 \cdot 13}$
ñ) 14 000 — $\mathbf{14\,000 = 2^4 \cdot 5^3 \cdot 7}$
o) 13 860 — $\mathbf{13\,860 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11}$

38 ●● Descompón en factores primos estos números:

a) 6 — $\mathbf{6 = 2 \cdot 3}$
b) 15 — $\mathbf{15 = 3 \cdot 5}$
c) 28 — $\mathbf{28 = 2^2 \cdot 7}$
d) 8 — $\mathbf{8 = 2^3}$
e) 21 — $\mathbf{21 = 3 \cdot 7}$
f) 30 — $\mathbf{30 = 2 \cdot 3 \cdot 5}$
g) 9 — $\mathbf{9 = 3^2}$
h) 24 — $\mathbf{24 = 2^3 \cdot 3}$
i) 50 — $\mathbf{50 = 2 \cdot 5^2}$
j) 12 — $\mathbf{12 = 2^2 \cdot 3}$
k) 27 — $\mathbf{27 = 3^3}$
l) 66 — $\mathbf{66 = 2 \cdot 3 \cdot 11}$

39 ● Factoriza los números 12 y 90. ¿Qué factores tienen en común?

$\mathbf{12 = 2^2 \cdot 3} \qquad \mathbf{90 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5}$

Tienen en común los factores 2 y 3

40 ●●● Factoriza los números 120 y 840 y averigua, así, si 120 es divisor de 840.

$\mathbf{120 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5} \qquad \mathbf{840 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}$

840 contiene todos los factores primos de 120. Entonces, 120 es divisor de 840.

41 ● Indica si es correcta la siguiente factorización del número 60: $60 = 2 \cdot 5 \cdot 6$

No es correcta, porque 6 no es primo.

42 ●● Escribe tres múltiplos y tres divisores del siguiente número: $2 \cdot 3^2 \cdot 5$

Múltiplos: $2^2 \cdot 3^2 \cdot 5$; $2 \cdot 3^3 \cdot 5$; $2 \cdot 3^2 \cdot 5^2$

Divisores: 2, 3, 5

43 ●●● Sin hacer ninguna operación, averigua si el número *n* es divisor de *m*. Razónalo.

a) $m = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5$

$n = 2 \cdot 3$

***n* es divisor de *m*, porque sus factores están contenidos en los factores de *m*.**

b) $m = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 7$

$n = 2^4 \cdot 3^2$

***n* no es divisor de *m*, porque el 2 aparece 4 veces en *n* y solo 3 veces en *m*.**

c) $m = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7$

$n = 2 \cdot 2 \cdot 2$

***n* no es divisor de *m*, porque el 2 aparece 3 veces en *n* y solo 2 veces en *m*.**

d) $m = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 5$

$n = 2 \cdot 3^2$

***n* es divisor de *m*, porque sus factores están contenidos en los factores de *m*.**

44 ●●● Sin hacer ninguna operación averigua si *m* es múltiplo de *n*. Razona tus respuestas.

a) $m = 2^2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5$

$n = 2 \cdot 5$

***m* es múltiplo de *n* ya que contiene todos los factores de *n*.**

b) $m = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 7$

$n = 2 \cdot 3^2$

***m* es múltiplo de *n* ya que contiene todos los factores de *n*.**

c) $m = 2^2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7$

$n = 2 \cdot 2 \cdot 11$

***m* no es múltiplo de *n*, pues no contiene a 11.**

d) $m = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 5$

$n = 2^3 \cdot 3^2$

***m* no es múltiplo de *n*, pues 2 aparece 2 veces en *m* y 3 en *n*.**

8. Múltiplos comunes y mínimo común múltiplo

Página 50

Piensa y deduce

Los múltiplos de 4 son $M(4) = \{4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, 32, 36, \ldots\}$.

Los múltiplos de 6 son $M(6) = \{6, 12, 18, 24, 30, 36, 42, 48, \ldots\}$.

¿Hay números en común en los dos conjuntos? ¿Podemos saber cuál es el menor de los múltiplos comunes del 6 y el 4? ¿Y el mayor?

Sí, hay números en común en los dos conjuntos, por ejemplo el 12 y el 36. El menor de ellos es el 12. El mayor no lo podemos saber porque hay infinitos múltiplos de un número, así que esos conjuntos siguen creciendo hasta infinito.

Página 51

45 ● Averigua los tres primeros múltiplos que tienen en común:

a) 3 y 9
9, 18 y 27

b) 2 y 5
10, 20 y 30

c) 12 y 18
36, 72 y 108

d) 2, 3 y 4
12, 24 y 36

e) 1, 3 y 6
6, 12 y 18

f) 3, 6 y 9
18, 36 y 54

46 ● Escribe los primeros múltiplos de los números dados hasta encontrar su mínimo común múltiplo.

a) 3 y 6

$M(3) = \{3, 6, 9, 12, \ldots\}$ $M(6) = \{6, 12, 18, \ldots\}$

m.c.m.(3, 6) = 6

b) 6 y 8

$M(6) = \{6, 12, 18, 24, 30, \ldots\}$ $M(8) = \{8, 16, 14, \ldots\}$

m.c.m.(6, 8) = 24

c) 2 y 9

$M(2) = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, \ldots\}$ $M(9) = \{9, 18, 27, \ldots\}$

m.c.m.(2, 9) = 18

d) 4 y 10

$M(4) = \{4, 8, 12, 16, 20, \ldots\}$ $M(10) = \{10, 20, 30, \ldots\}$

m.c.m.(4, 10) = 20

e) 15 y 20

$M(15) = \{15, 30, 45, 60, \ldots\}$ $M(20) = \{20, 40, 60, \ldots\}$

m.c.m.(15, 20) = 60

f) 2, 5 y 6

$M(2) = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 24, 26, 28, 30, \ldots\}$
$M(5) = \{5, 10, 15, 20, 25, 30, \ldots\}$ $M(6) = \{6, 12, 18, 24, 30, \ldots\}$

m.c.m.(2, 5, 6) =30

47 ●● Calcula:

a) m.c.m. (2, 4)

m.c.m.(2, 4) = 4

b) m.c.m. (2, 6)

m.c.m.(2, 6) = 6

c) m.c.m. (8, 12)

m.c.m.(8, 12) = 24

d) m.c.m. (3, 9)

m.c.m.(3, 9) = 9

e) m.c.m. (5, 6)

m.c.m.(5, 6) = 30

f) m.c.m. (4, 6)

m.c.m.(4, 6) = 12

48 ● Escribe los primeros múltiplos de los siguientes números hasta averiguar cuál es su mínimo común múltiplo. Vuelve a obtenerlo después, a partir de la descomposición en factores primos y comprueba que consigues el mismo resultado.

a) 8 y 12

$M(8) = \{8, 16, 24, \ldots\}$, $M(12) = \{12, 24, \ldots\}$.

Entonces, m.c.m.(8, 12) = 24.

$8 = 2^3$; $12 = 2^2 \cdot 3$. Entonces, m.c.m.(8, 12) $= 2^3 \cdot 3 = 24$

b) 15 y 20

$M(15) = \{15, 30, 45, 60, \ldots\}$, $M(20) = \{20, 40, 60, \ldots\}$.

Entonces, m.c.m.(15, 20) = 60.

$15 = 3 \cdot 5$; $20 = 2^2 \cdot 3$. Entonces, m.c.m.(15, 20) $= 2^2 \cdot 3 \cdot 5 = 60$

c) 4 y 18

$M(4) = \{4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, 32, 36, \ldots\}$, $M(18) = \{18, 36, \ldots\}$.

Entonces, m.c.m.(4, 18) = 36

$4 = 2^2$; $18 = 2 \cdot 3^2$. Entonces, m.c.m.(4, 18) $= 2^2 \cdot 3^2 = 36$

49 ● Obtén, usando la factorización de los números:

a) m.c.m. (4, 18)

m.c.m.(4, 18) $= 2^2 \cdot 3^2 = 36$

b) m.c.m. (10, 198)

m.c.m. (10,198) $= 2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 11 = 990$

c) m.c.m. (45, 54)

m.c.m. (45, 54) $= 2 \cdot 3^3 \cdot 5 = 270$

d) m.c.m. (30, 72)

m.c.m. (30, 72) $= 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 = 360$

e) m.c.m. (365, 600)

m.c.m. (365, 600) $= 2^3 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 7^3 = 43\,800$

f) m.c.m. (315, 1 845)

m.c.m. (315, 1 845) $= 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 41 = 12\,915$

50 ●● Averigua:

a) m.c.m. (2, 6, 9)

m.c.m. (2, 6, 9) = 18

b) m.c.m. (4, 6, 12)

m.c.m. (4, 6, 12) = 12

c) m.c.m. (12, 18, 24)

m.c.m. (12, 18, 24) = 72

d) m.c.m. (6, 15, 18)

m.c.m. (6, 15, 18) = 90

e) m.c.m. (3, 5, 15)

m.c.m.(3, 5, 15) = 15

f) m.c.m. (2, 20, 30)

m.c.m.(2, 20, 30) = 60

g) m.c.m. (35, 45, 150)

m.c.m.(35, 45, 150) = $\mathbf{2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 = 6\,300}$

h) m.c.m (4, 6, 21, 27)

m.c.m.(4, 6, 21, 27) = $\mathbf{2^2 \cdot 3^2 \cdot 7 = 756}$

51 ● Calcula el mínimo común múltiplo de *m* y *n,* sin averiguar el valor numérico de cada uno:

a) $m = 2^3 \cdot 3$ y $n = 2 \cdot 3^2 \cdot 5$

$\mathbf{2^3 \cdot 3^2 \cdot 5}$

b) $m = 2^3 \cdot 3 \cdot 5^2$ y $n = 2^2 \cdot 3^2$

$\mathbf{2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^2}$

c) $m = 3 \cdot 5$ y $n = 2 \cdot 7$

$\mathbf{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}$

d) $m = 3 \cdot 5 \cdot 7^2$ y $n = 2 \cdot 5^2 \cdot 7$

$\mathbf{2 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 7^2}$

52 ●● En una carrera de 50 km hay un puesto de agua cada 4 km y un control de los corredores cada 3 km. ¿En qué puntos kilométricos coincidirán el puesto de agua y el control?

Como m.c.m.(4, 3) = 12, entonces los corredores coincidirán en los puntos kilométricos 12, 24, 36 y 48.

53 ●● Por una misma parada pasan los autobuses de la línea A cada 5 min y los de la línea B cada 8 min. A las doce en punto han coincidido los de las dos líneas. ¿A qué hora volverán a coincidir?

Como m.c.m. (5, 8) = 40, los dos autobuses volverán a coincidir a las 12 h 40 min.

54 ●● Con el número de alumnos que tiene una clase se pueden formar equipos de 3, de 4 o de 6 miembros, sin que ningún alumno se quede sin equipo. ¿Cuántos alumnos tiene como mínimo dicha clase?

m.c.m.(3, 4, 6) = 12. Como mínimo hay 12 alumnos.

55 ●● Se han hecho dos torres de cajas con la misma altura. Si una de las torres está formada por cajas de 15 cm de alto y la otra por cajas de 20 cm de alto, ¿qué altura han alcanzado como mínimo las dos

La altura de las torres es, como mínimo, 60 cm, ya que m.c.m.(15, 20) = 60.

56 ●● Un grupo de 6 amigos va a una pizzería. Las pizzas vienen dividas en 8 porciones y todos quieren tomar el mismo número de porciones, ¿cuántas pizzas tienen que pedir cómo mínimo?

m.c.m.(6, 8) = 24. Se necesitan al menos 24 trozos, es decir, 3 pizzas

57 ●●● Jaime cuenta sus cómic de 2 en 2, de 4 en 4 y de 6 en 6, y en ningún caso le sobra ninguno. ¿Cuántos cómic tiene Jaime si posee entre 30 y 40?

Como m.c.m. (2, 4, 6) = 12, Jaime tiene 36 cómics.

58 ●●● ¿Cuánto mide el lado del cuadrado más pequeño que se puede formar con fichas rectangulares de 12 cm de largo y 8 cm de ancho?

El lado del cuadrado más pequeño que se puede formar medirá 24 cm, ya que m.c.m.(12, 8) = 24.

59 ●●● Indica cuál es el mínimo común múltiplo de dos números que cumplen la condición dada:

a) Uno es múltiplo del otro.

Es el primer número.

b) Ambos números carecen de divisores primos en común.

Es el producto de ambos.

c) Uno de los dos números es 1.

Es el número distinto de 1.

60 ●● ¿Se puede asegurar que dados dos, o más números, siempre tienen múltiplos en común?

Sí, el producto de los números es siempre un múltiplo común.

9. Divisores comunes y máximo común divisor

Página 52

Piensa y deduce

Los divisores de 12 son $D(12) = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$.

Los divisores de 20 son $D(20) = \{1, 2, 4, 5, 10, 20\}$.

¿Podemos saber cuál es el mayor de los divisores comunes? ¿Cómo mínimo cuántos divisores tienen en común dos números?

Sí, podemos saberlo, es 4. Como mínimo tiene un divisor en común que es el 1.

Página 53

61 ● Halla todos los divisores de los siguientes números y obtén su máximo común divisor:

a) 3 y 6

$D(3) = \{1, 3\}$, $D(6) = \{1, 2, 3, 6\}$ $\Rightarrow$ M.C.D.(3, 6) = 3

b) 18 y 25

$D(18) = \{1, 2, 3, 6, 9, 18\}$, $D(25) = \{1, 5, 25\}$ $\Rightarrow$ M.C.D.(18, 25) = 1

c) 8 y 20

$D(8) = \{1, 2, 4, 8\}$, $D(20) = \{1, 2, 4, 5, 10, 20\}$ $\Rightarrow$ M.C.D.(8, 20) = 4

d) 12, 18 y 30

$D(12) = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$, $D(18) = \{1, 2, 3, 6, 9, 18\}$, $D(30) = \{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}$ $\Rightarrow$ M.C.D.(12, 18, 30) = 6

e) 12 y 42

$D(12) = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$, $D(42) = \{1, 2, 3, 6, 7, 14, 21, 42\}$ $\Rightarrow$ M.C.D. (12, 42) = 6

f) 20, 30 y 90

**$D(20) = \{1, 2, 4, 5, 10, 20\}$, $D(30) = \{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}$,
$D(90) = \{1, 2, 3, 5, 6, 9, 10, 15, 18, 30, 45, 90\}$ $\Rightarrow$ M.C.D. (20, 30, 90) = 10**

62 ● Calcula un divisor común de estos números:

a) 8 y 20	***b)*** 30 y 50	***c)*** 15 y 18
1, 2 y 4	**1, 2, 5 y 10**	**1 y 3**

63 ●● Calcula:

a) M.C.D. (3, 6) = **3**	***c)*** M.C.D. (2, 9) = **1**	***e)*** M.C.D. (10, 20) = **10**
b) M.C.D. (4, 6) = **2**	***d)*** M.C.D. (6, 9) = **3**	***f)*** M.C.D. (20, 30) = **10**

64 ● Indica si las siguientes pares de números son primos entre sí:

a) 18 y 20

El 18 y el 20 no son primos entre sí.

b) 6 y 15

El 6 y el 15 no son primos entre sí.

c) 4 y 9

El 4 y el 9 sí son primos entre sí.

d) 3 y 2

El 2 y el 3 sí son primos entre sí.

65 ● Escribe todos los divisores de estos números y averigua su máximo común divisor. A continuación, vuelve a obtenerlo a partir de la descomposición en factores primos y comprueba que llegas al mismo resultado.

a) 12 y 30

$D(12) = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$, $D(30) = \{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}$. Entonces, M.C.D. (12, 30) = 6.

$12 = 2^2 \cdot 3$; $30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$. Entonces, M.C.D.(12, 30) = 6.

b) 18 y 45

$D(18) = \{1, 2, 3, 6, 9, 18\}$, $D(45) = \{1, 3, 5, 9, 15, 45\}$. Entonces, M.C.D. (18, 45) = 9.

$18 = 2 \cdot 3^2$; $45 = 3^2 \cdot 5$. Entonces, M.C.D.(18, 45) = 9.

c) 16 y 40

$D(16) = \{1, 2, 4, 8, 16\}$, $D(40) = \{1, 2, 4, 5, 8, 10, 20, 40\}$. Entonces, M.C.D. (16, 40) = 8.

$16 = 2^4$; $40 = 2^3 \cdot 5$. Entonces, M.C.D. (16, 40) = 8

66 ● Factorizando, obtén los números dados:

a) M.C.D. (12, 16) = **4**

b) M.C.D. (9, 30) = **3**

c) M.C.D. (60, 200) = **20**

d) M.C.D. (600, 200) = **200**

e) M.C.D. (150, 315) = **15**

f) M.C.D. (980, 2 200) = **20**

67 ●● Averigua:

a) M.C.D. (6, 15, 18) **= 3**

b) M.C.D. (60, 84, 132) = **12**

c) M.C.D. (18, 24, 30) = **6**

d) M.C.D. (24, 60, 80) **= 4**

68 ● Calcula el mínimo común múltiplo y el máximo común divisor de los siguientes números:

a) 9 y 12

m.c.m.(9, 12) = 36 **M.C.D.(9, 12) = 3**

b) 18 y 42

m.c.m.(18, 42) = 126 **M.C.D.(18, 42) = 6**

c) 8 y 15

m.c.m.(8, 15) = 120 **M.C.D.(8, 15) = 1**

d) 108 y 630

m.c.m.(108, 630) = 1 260 **M.C.D.(108, 630) =18**

e) 140 y 300

m.c.m.(140, 300) = 2 100 **M.C.D.(140, 300) = 20**

f) 693 y 1 485

m.c.m. (693, 1 485) = 10 395 **M.C.D. (693, 1 485) = 99**

69 ●● Un número, *a,* es divisor de otro, *b;* ¿cuál es el máximo común divisor de ambos?

Es *a*.

70 ●● Dos números son primos entres sí; ¿cuál es su m.c.m y su M.C.D.?

Su m.c.m. es su producto y su M.C.D es 1.

71 ●● ¿Se te ocurre alguna forma rápida de averiguar el máximo común divisor de dos números a partir de los divisores del menor de ellos?

Para averiguar de forma rápida el máximo común divisor de dos números a partir de los divisores del menor de ellos, se divide el número mayor entre los divisores del número menor, empezando por el mayor de dichos divisores. En cuanto una de esas divisiones sea exacta, ese divisor será el máximo común divisor.

72 ●● Hay que colocar en cajas 24 botellas de refresco de naranja y 60 de limón, de manera que en todas las cajas haya el mismo número de unidades y que no se mezclen en una misma caja botellas de los dos sabores. ¿Cuál es el número máximo de botellas que pueden contener las cajas?

Como M.C.D. (24, 60) = 12, el máximo número de botellas que pueden contener las cajas es 12.

73 ●● Se dispone de tres listones de madera que miden 90 cm, 120 cm y 150 cm de longitud, respectivamente. Si se quieren cortar los tres listones en trozos del mismo tamaño:

a) ¿Cuánto puede medir cada trozo como máximo?

Como M.C.D. (90, 120, 150) = 30, cada trozo puede medir, como máximo, 30 cm.

b) ¿Cuántos trozos saldrán de cada listón?

Saldrán, respectivamente, 90 : 30 = 3 trozos; 120 : 30 = 4 trozos, y 150 : 30 = 5 trozos.

74 ●● Maite tiene 30 caramelos de fresa y 45 de menta. Los quiere empaquetar en bolsas, de manera que todas tengan la misma composición. Si quiere preparar el mayor número de bolsas sin que le sobre ningún caramelo:

a) ¿Cuántas bolsas obtendrá?

Como M.C.D. (30, 45) = 15, Maite obtendrá 15 bolsas de caramelos de fresa y otras 15 de menta.

b) ¿Qué composición tendrá cada bolsa?

Cada bolsa tendrá 2 caramelos de fresa y 3 de menta, ya que:

- **Bolsa de caramelos de fresa: 30 : 15 = 2 caramelos**
- **Bolsa de caramelos de menta: 45 : 15 = 3 caramelos**

75 ● Calcula el máximo común divisor de m y n, sin averiguar el valor numérico de cada uno:

a) $m = 2^3 \cdot 3$ y $n = 2 \cdot 3^2 \cdot 5$

$2 \cdot 3$

b) $m = 2^3 \cdot 3 \cdot 5^2$ y $n = 2^2 \cdot 3^2$

$2^2 \cdot 3$

c) $m = 3 \cdot 5$ y $n = 2 \cdot 7$

1

d) $m = 3 \cdot 5 \cdot 7^2$ y $n = 2 \cdot 5^2 \cdot 7$

$5 \cdot 7$

76 ●●● Observa la descomposición factorial de los números a, b, c y d y contesta:

$a = 2 \cdot 3^2$ $\quad b = 2 \cdot 3$ $\quad c = 5 \cdot 7$ $\quad d = 2 \cdot 3^2 \cdot 7$

a) ¿Es b el M.C.D de a y c?

No, el M.C.D. de *a* y *c* es 1.

b) ¿Cuáles son primos entre sí?

a* y *c*; *b* y *c

Estrategias para resolver problemas

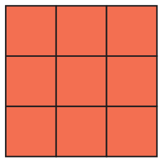
Página 54

1 ●● Busca todos los divisores de 210.

Como $210 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$:

- **Los divisores de 210 con un factor son 2, 3, 5 y 7.**
- **Los divisores de 210 con dos factores son 6, 10, 14, 15, 21 y 35.**
- **Los divisores de 210 con tres factores son 30, 42 y 105.**
- **Los divisores de 210 con cuatro factores son 210.**

2 ● Calcula cuántos cuadrados puedes contar en la siguiente figura:



En la figura se pueden contar 9 cuadrados pequeños, 4 cuyo lado está formado por dos cuadrados pequeños y 1 cuyo lado se forma con tres cuadrados pequeños. En total hay 14 cuadrados.

3 ● ¿Cuántos números distintos se pueden obtener al sumar el resultado de lanzar dos dados de parchís?

Al lanzar uno de los dos dados, se pueden obtener los resultados 1, 2, 3, 4, 5 y 6. Por tanto, al lanzar los dos dados los resultados serán 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 y 12.

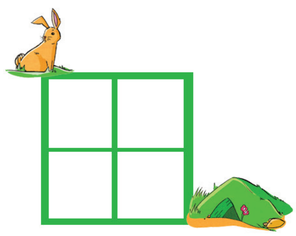
4 ● Supón que dispones de dos billetes de 20 € y otros dos de 50 €. Calcula todas las cantidades que puedes formar con esos cuatro billetes.

Las cantidades que se pueden formar con los cuatro billetes son 20 €, 40 €, 50 €, 70 €, 90 €, 100 €, 120 € y 140 €.

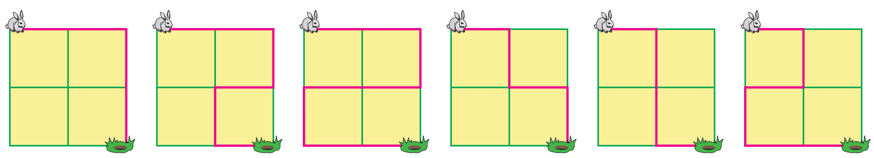
5 ●●● Eva tiene tres hermanos. El producto de sus edades es 36, y su suma, 13. ¿Qué edades pueden tener los hermanos de Eva?

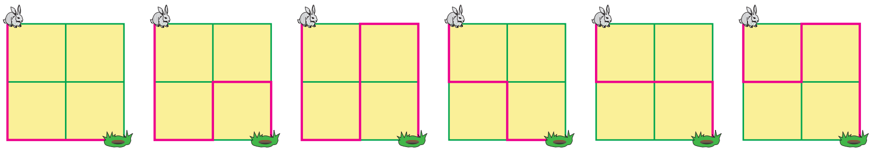
Como $36 = 3^2 \cdot 2^2$, y el producto de las edades de los 3 hermanos de Eva es 36, las edades serán 3, 3 y 4, o 9, 2 y 2, o 3, 6 y 2. Ahora bien, como la suma de las tres cifras tiene que ser 13, Eva tiene un hermano de 9 años y dos hermanos de 2 años.

6 ●●● Un conejo se desplaza por las rayas verdes para llegar a su madriguera y nunca pasa dos veces por el mismo punto. Si parte de A, ¿cuántos recorridos distintos puede hacer?



Puede hacer los 12 recorridos que aparecen en los siguientes dibujos:





Ejercicios y problemas

(páginas 55/57)

Divisibilidad. Múltiplos y divisores

1 ● Di si las siguientes afirmaciones son correctas. Razona la respuesta.

a) 49 es múltiplo de 7.

Es correcto, ya que $49 = 7 \cdot 7$.

b) 6 es divisor de 12.

Es correcto, ya que $12 : 6 = 2$.

c) 24 es divisible por 7.

No es correcto, ya que $24 = 7 \cdot 3 + 3$.

d) 52 es múltiplo de 13.

Es correcto, ya que $52 = 13 \cdot 4$.

e) 258 es divisible por 65.

No es correcto, ya que $258 = 65 \cdot 3 + 63$.

f) 13 es un divisor de 86.

No es correcto, ya que $86 = 13 \cdot 6 + 8$.

g) 7 es un múltiplo de 14.

No es correcto, ya que 14 es múltiplo de 7.

2 ● Averigua si entre la pareja de números de cada apartado hay relación de divisibilidad. En tal caso, indícalo utilizando las expresiones «es divisible por», «es múltiplo de» y «es divisor de».

a) 8 y 24

24 es divisible por 8. 24 es múltiplo de 8. 8 es divisor de 24.

b) 12 y 312

312 es divisible por 12. 312 es múltiplo de 12. 12 es divisor de 312.

c) 24 y 748

No hay relación de divisibilidad.

3 ● Calcula los cinco primeros múltiplos de 8.

8, 16, 24, 32 y 40

4 ● Halla los múltiplos de 12 comprendidos entre 200 y 250.

204, 216, 228 y 240

5 ●● Determina las cifras con las que puede terminar un múltiplo de 3 y uno de 6.

Los múltiplos de 3 pueden acabar en cualquier cifra.

Los múltiplos de 6 pueden acabar en cualquier cifra par.

6 ●● Escribe los divisores de estos números:

a) 16

$D(16) = \{1, 2, 4, 8, 16\}$

b) 24

$D(24) = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24\}$

c) 80

$D(80) = \{1, 2, 4, 8, 10, 16, 20, 40, 80\}$

d) 90

$D(90) = \{1, 2, 3, 5, 6, 9, 10, 15, 18, 30, 45, 90\}$

Criterios de divisibilidad

7 ● Indica, sin hacer ninguna división, cuáles de los siguientes números son múltiplos de 2, cuáles lo son de 3, cuáles de 5 y cuáles de 11:

a) 24 *b)* 120 *c)* 396 *d)* 345 *e)* 121 *f)* 99 *g)* 1 335 *h)* 112 722

Múltiplos de 2: 24, 120, 396 y 112 722

Múltiplos de 3: 24, 120, 396, 345, 99, 1 335 y 112 722

Múltiplos de 5: 120, 345 y 1 335.

Múltiplos de 11: 396, 121 y 99.

8 ●● Escribe el primer múltiplo común de 2 y 3 mayor que 102.

m.c.m. (2, 3) = 6 y 102 : 6 = 17

Luego, 6 · 18 = 108 es el primer múltiplo de 2 y 3 mayor que 102.

9 ● ¿Se puede formar un número de tres cifras que sea múltiplo de 3 y que esté compuesto por las cifras 1, 5 y 7? ¿Y por 0, 5 y 7?

Con 1, 5 y 7 no se puede, porque 1 + 5 + 7 = 13. Con 0, 5 y 7 sí, por ejemplo, 750.

10 ●● Escribe todos los números de tres cifras múltiplos de 2 que se pueden formar con las cifras 1, 2 y 3, sin repetir ninguna.

132 y 312

11 ●● Escribe todos los números de tres cifras múltiplos de 5 que se pueden formar con las cifras 0, 2 y 5, sin repetir ninguna.

250, 520 y 205

12 ●●● Juan tiene una forma muy peculiar de dar a sus amigos su número de teléfono, que consta de nueve cifras, todas ellas distintas. Les dice que, leyéndolo de izquierda a derecha, se cumple que:

- La primera cifra es un múltiplo de 3 mayor que 6.
- Las dos primeras cifras forman un múltiplo de 2 y 5.
- Las tres primeras cifras forman un número par múltiplo de 3.
- Las cuatro primeras cifras forman un número que es múltiplo de 5, pero no de 2.
- Las cinco primeras cifras forman un múltiplo de 2 y de 3.
- Las seis primeras cifras forman un múltiplo de 11.
- La séptima cifra es un múltiplo de 7.
- Las ocho primeras cifras forman un número impar.
- Las cuatro últimas cifras forman un múltiplo de 11.

¿Sabrías decir cuál es el número de teléfono de Juan?

El número es el 906 543 715.

Números primos y compuestos

13 ● Clasifica estos números en primos y compuestos:

a) 6
Compuesto

b) 7
Primo

c) 15
Compuesto

d) 6
Compuesto

e) 49
Compuesto

f) 81
Compuesto

g) 93
Compuesto

h) 1
No es ni primo ni compuesto

14 ● Escribe los números primos menores que 25.

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19 y 23

15 ● Determina, en cada caso, si el número es primo o compuesto:

a) 91
Compuesto

b) 103
Primo

c) 187
Compuesto

d) 209
Compuesto

e) 251
Primo

f) 300
Compuesto

16 ● Escribe cada número como producto de dos factores distintos de 1. Averigua cuál es el único caso en que no es posible hacerlo.

a) 36
36 = 4 · 9

b) 54
54 = 6 · 9

c) 71
No se puede, porque 71 es primo.

d) 120
120 = 12 · 10

Descomposición en factores primos

17 ● Descompón el número 106 en un producto de dos factores, de tres factores, y así sucesivamente, hasta conseguir el mayor número posible de factores.

$106 = 2 \cdot 53$

Ambos son números primos, no se puede descomponer más.

18 ● Descompón en factores primos:

a) 45

$45 = 3^2 \cdot 5$

b) 63

$63 = 3^2 \cdot 7$

c) 360

$360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$

d) 504

$504 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 7$

e) 162

$162 = 2 \cdot 3^4$

f) 1 400

$1\,400 = 2^3 \cdot 5^2 \cdot 7$

g) 225

$225 = 3^2 \cdot 5^2$

h) 4 680

$4\,680 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 13$

Máximo común divisor y mínimo común múltiplo

19 ● Halla los cinco primeros múltiplos comunes de los siguientes números:

a) 4 y 6

m.c.m. $(4, 6) = 2^2 \cdot 3 = 12 \Rightarrow$ 12, 24, 36, 48 y 60

b) 6 y 15

m.c.m. $(6, 15) = 2 \cdot 3 \cdot 5 = 30 \Rightarrow$ 30, 60, 90, 120 y 150

c) 12 y 18

m.c.m. $(12, 18) = 2^2 \cdot 3^2 = 36 \Rightarrow$ 36, 72, 108, 144 y 180

20 ●● ¿Cuál es el primer múltiplo común mayor que 200 de 6 y 9?

216

21 ● Averigua los divisores comunes de 12 y 18.

$D(12) = \{1, 2, 3, 6, 12\}$, $D(18) = \{1, 2, 3, 6, 9, 18\}$

Los divisores comunes de 12 y 18 son 1, 2, 3 y 6.

22 ● Contesta las siguientes preguntas sobre los números *m* y *n*. En las respuestas negativas da la solución correcta:

a) $m = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$ y $n = 2 \cdot 3^3 \cdot 7$

- ¿Es su m.c.m. $2^3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$?
- ¿Es su M.C.D. $2^3 \cdot 3^3$?

No; m.c.m. $(m, n) = 2^3 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7$

No; M.C.D. $(m, n) = 2 \cdot 3^2$

b) $m = 2 \cdot 3^2 \cdot 7$ y $n = 2^3 \cdot 5$

- ¿Es su m.c.m. $2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$?
- ¿Es su M.C.D. 2^3?

Sí; el m.c.m. es correcto.

No; M.C.D. $(m, n) = 2$

c) $m = 3^2 \cdot 5$ y $n = 3^3$

- ¿Es su m.c.m. $3^2 \cdot 3 \cdot 5$?
- ¿Es su M.C.D. 3?

El m.c.m. es numéricamente correcto, pero está mal expresado. La expresión correcta es m.c.m. $(m, n) = 3^3 \cdot 5$.

No; es M.C.D. $(m, n) = 3^2$.

d) $m = 2 \cdot 7^2$ y $n = 3 \cdot 5$

- ¿Es su m.c.m. $2 \cdot 7^2 \cdot 3 \cdot 5$?
- ¿Es su M.C.D. 0?

El m.c.m. es correcto.

El M.C.D. es 1.

23 ● Calcula:

a) m.c.m. (8, 40), M.C.D. (8, 40)

m.c.m. (8, 40) = 40, M.C.D. (8, 40) = 8

b) m.c.m. (15, 35), M.C.D. (15, 35)

m.c.m. (15, 35) = 105, M.C.D. (15, 35) = 5

c) m.c.m. (84, 360), M.C.D. (84, 360)

m.c.m. (84, 360) = 2 520, M.C.D. (84, 360) = 12

d) m.c.m. (420, 585), M.C.D. (420, 585)

m.c.m. (420, 585) = 16 380, M.C.D. (420, 585) = 15

e) m.c.m. (240, 270), M.C.D. (240, 270)

m.c.m. (240, 270) = 2 160, M.C.D. (240, 270) = 30

f) m.c.m. (396, 756), M.C.D. (396, 756)

m.c.m. (396, 756) = 8 316, M.C.D. (396, 756) = 36

24 ●● Averigua el mínimo común múltiplo y el máximo común divisor de los números dados:

a) 6, 8 y 12

m.c.m. (6, 8, 12) = 24, M.C.D. (6, 8, 12) = 2

b) 270, 315 y 360

m.c.m. (270, 315, 360) = 3 780, M.C.D. (270, 315, 360) = 45

25 ●● Calcula mentalmente el mínimo común múltiplo y el máximo común divisor de los siguientes números:

a) 4 y 8

m.c.m. (4, 8) = 8, M.C.D. (4, 8) = 4

b) 2 y 3

m.c.m. (2, 3) = 6, M.C.D. (2, 3) = 1

c) 3 y 12

m.c.m. (3, 12) = 12, M.C.D. (3, 12) = 3

d) 7 y 10

m.c.m. (7, 10) = 70, M.C.D. (7, 10) = 1

e) 6 y 12

m.c.m. (6, 12) = 12, M.C.D. (6, 12) = 6

f) 6 y 9

m.c.m. (6, 9) = 18, M.C.D. (6, 9) = 3

g) 10 y 15

m.c.m. (10, 15) = 30, M.C.D. (10, 15) = 5

h) 2 y 5

m.c.m. (2, 5) = 10, M.C.D. (2, 5) = 1

i) 4 y 6

m.c.m. (4, 6) = 12, M.C.D. (4, 6) = 2

j) 2, 3 y 4

m.c.m. (2, 3, 4) = 12, M.C.D. (2, 3, 4) = 1

k) 3, 6 y 12

m.c.m. (3, 6, 12) = 12, M.C.D. (3, 6, 12) = 3

l) 3, 4 y 6

m.c.m. (3, 4, 6) = 12, M.C.D. (3, 4, 6) = 1

26 ●● Si $m = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$ y $n = 2 \cdot 3^3$, indica cuáles de los siguientes números son múltiplos comunes de *m* y *n:*

a) $2 \cdot 3^2 \cdot 5$ *b)* $2^2 \cdot 3^3 \cdot 5$ *c)* $2^2 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7$

***b)* y *c)* son múltiplos comunes de *m* y *n*.**

27 ●● Sabiendo que $m = 2 \cdot 3^3$ y $n = 2 \cdot 3 \cdot 5$, indica cuáles de los siguientes números son divisores comunes de *m* y *n:*

a) 2 *b)* 3^2 *c)* $2 \cdot 3$ *d)* $2 \cdot 5$

***a)* y *c)* son divisores comunes de *m* y *n*.**

Problemas de divisibilidad

28 ● Una marca de flanes se vende en envases de 8 unidades. ¿Se pueden comprar 184 flanes de esa marca? ¿Y 138 flanes?

Sí, se pueden comprar 184 flanes, adquiriendo 23 envases de 8 unidades.

No es posible comprar 138 flanes, porque 138 no es múltiplo de 8.

29 ● Samuel y Samia están contando hasta 100 al mismo tiempo. Samuel da una palmada cada 6 números, y Samia, cada 8 números. ¿En qué números coincidirán las palmadas de ambos amigos?

Como m.c.m (6, 8) = 24, coinciden a las 24, las 48, las 72 y las 96 palmadas.

30 ● Sandra ha contado 18 monedas de 1 €. Para comprobar que no se ha equivocado, hace montones del mismo tamaño. ¿De cuántas formas puede comprobar que efectivamente tiene 18 €?

Con los 18 €, Sandra puede hacer montones de 1, 2, 3, 6 o 9 monedas, luego, puede comprobar que tiene 18 € de 5 formas. (No se contempla 18 como solución pues solo habría un montón.)

31 ●● ¿Cuántos modos hay de colocar 45 bollos en bandejas, de manera que cada una contenga el mismo número de bollos?

Hay 6 formas de poner 45 bollos por bandeja, porque en una bandeja se pueden colocar 1, 3, 5, 9, 15 o 45 bollos.

32 ● En un campamento hay 47 participantes. ¿Qué problema tienen los monitores para hacer equipos con el mismo número de componentes?

47 es número primo, por lo que no es divisible y no permite hacer equipos con el mismo número de componentes.

33 ● A Javier le cobran 36 € y 28 céntimos por 3 camisas iguales. ¿Cómo se da cuenta Javier, sin hacer ninguna división, de que le han cobrado mal?

36 es divisible por 3, pero 28 no lo es.

34 ●● Julia tiene 135 cuentas amarillas, 150 rojas y 180 verdes. Quiere hacer el mayor número posible de collares con la misma composición de cuentas.

a) ¿Cuántos collares puede confeccionar sin que le sobre ninguna cuenta?

Puesto que M.C.D. (135, 150, 180) = 15, Julia puede confeccionar 15 collares.

b) ¿Cuántas cuentas de cada color tendrá cada collar?

Cada uno de los 15 collares tendrá 9 cuentas amarillas, 10 cuentas rojas y 12 cuentas verdes.

35 ●● En una granja avícola empaquetan los huevos de la clase L en estuches de 12 huevos y los de la clase XL en estuches de 10 huevos. Cierto día empaquetaron entre 3 130 y 3 200 huevos de cada clase. Si usaron el mismo número de huevos de ambas categorías:

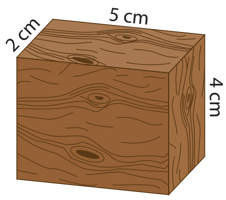
a) ¿Cuántos huevos empaquetaron en total?

Como M.C.D. (12, 10) = 60, empaquetaron 3 180 huevos.

b) ¿Cuántos estuches prepararon de cada clase?

Prepararon 265 estuches de clase L y 318 de clase XL.

36 ●● Calcula cuántas piezas como la que aparece a continuación son necesarias, como mínimo, para construir un cubo:



El cubo debe tener 20 cm de lado, ya que m.c.m. (2, 5, 4) = 20. Luego, se necesitan $10 \cdot 4 \cdot 5 = 200$ piezas.

37 ●● Tres piezas de tela miden, respectivamente, 72 m, 126 m y 180 m. Se desea cortar las tres piezas en trozos iguales de la mayor longitud posible:

a) ¿Qué longitud deben tener dichos trozos?

Cada trozo medirá, respectivamente, 4 m, 7 m y 10 m.

b) ¿En cuántas partes se dividirá cada pieza de tela?

Como M.C.D. (72, 126, 180) = 18, las tres piezas se pueden dividir en 18 trozos.

38 ●● Un semáforo se pone en verde cada 5 min, otro cada 6 min y un tercero cada 4 min. Se acaban de poner en verde los tres, ¿cuándo volverán a coincidir en este color?

Volverán a coincidir en 1 hora, ya que m.c.m. (4, 5, 6) = 60.

39 ●● Si se cuentan los libros de una estantería de 2 en 2, no sobra ninguno. Lo mismo ocurre si se cuentan de 3 en 3 o de 5 en 5. ¿Cuántos libros tiene como mínimo dicha estantería?

Debe haber, por lo menos, 30 libros, ya que m.c.m. (2, 3, 5) = 30.

40 ●● Un trozo de papel continuo mide 1,50 m de largo y 45 cm de ancho. Si se quiere dibujar en él una cuadrícula formada por cuadrados enteros del mayor tamaño posible:

a) ¿Cuánto debe medir el lado del cuadrado?

Como M.C.D. (150, 45) = 15, el lado del cuadrado debe medir 15 cm.

b) ¿En cuántos cuadrados quedará dividida la cartulina?

150 : 15 = 10 y 45 : 15 = 3. La cartulina se dividirá en 3 · 10 = 30 cuadrados.

41 ● ¿Cuál es el peso mínimo que se puede medir en una balanza empleando únicamente pesas de 30 g, o de 120 g o de 500 g?

Como M.C.D. (30, 120, 500) = 10, el peso mínimo que se puede medir en la balanza son 10 g.

42 ●●● Una carpeta contiene menos de 100 archivos. Contándolos de 4 en 4, de 5 en 5 o de 6 en 6, sobran, en todos los casos, 3 archivos. ¿Cuántos hay en la carpeta?

Como m.c.m. (4, 5, 6) = 60 y sobran 3 archivos, en la carpeta hay 63 archivos.

43 ●●● Al dividir la edad de Juan entre 3 y entre 8, el resto es 1. Sin embargo, al dividirla entre 7, el resto es 0. ¿Qué edad tiene Juan si todavía no ha cumplido 100 años?

m.c.m. (3, 8) = 24

24 + 1 = 25 no es múltiplo de 7.

2 · 24 + 1 = 49 es múltiplo de 7.

Luego Juan tiene 49 años.

44 ●●● El número de personas que participan en un concurso es tal que si se agrupan de 2 en 2 sobra una; si lo hacen de 3 en 3, sobran 2; si lo hacen de 5 en 5, sobran 4, y si lo hacen de 7 en 7, no sobra ninguna. ¿Cuántos concursantes hay si son más de 105 y menos de 125?

El primer múltiplo de 7 que encontramos por debajo de 125 es el 119, número que también cumple el resto de las condiciones. Por tanto, hay 119 concursantes.

45 ●●● Un panadero ha preparado entre 140 y 200 galletas, que empaqueta en bolsas de 6 o de 8 unidades. Sin embargo, con dos galletas más podría haberlas empaquetado en bolsas de 10. ¿Cuántas galletas hizo?

Como m.c.m. (6, 8) = 24, el número comprendido entre 140 y 200 que es múltiplo de 24 y que al sumarle 2 da como resultado un múltiplo de 10 es 168. Por consiguiente, el panadero hizo 168 galletas.

Evaluación (página 57)

Reconoces si entre dos números existe relación de divisibilidad

1 ● Averigua si 216 es múltiplo de 18.

Sí; 216 es múltiplo de 18, pues 216 = 18 · 12.

2 ● Comprueba si 98 es divisible por 7.

Sí; 98 es divisible por 7, pues 98 = 7 · 14.

3 ● Razona si 9 es un divisor de 34.

No; 9 no es un divisor de 34, porque la división 34 : 9 no es exacta.

Obtienes los múltiplos y divisores de un número

4 ● Averigua los múltiplos comunes de 8 y 12 menores que 80.

Como m.c.m. (8, 12) = 24, los múltiplos comunes de 8 y 12 menores que 80 son 24, 48 y 72.

5 ● Escribe todos los divisores comunes de 30 y 48.

***D*(30) = {1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30}   *D*(48) = {1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24, 48}**

Luego, los divisores comunes de 30 y 48 son 1, 2, 3 y 6.

6 ● Indica, sin hacer ninguna división, cuáles de los siguientes números son divisibles por 2, cuáles por 3, cuáles por 5 y cuáles por 11.

a) 30   *b)* 99   *c)* 330   *d)* 2 145

Divisibles por 2: 30 y 330.

Divisibles por 3: 30, 99, 330 y 2 145.

Divisibles por 5: 30, 330 y 2 145.

Divisibles por 11: 99, 330 y 2 145.

7 ¿Qué cifra hay que añadir para que el número 13___ sea múltiplo de 3, pero no de 2? ¿Y para que sea múltiplo de 11?

135 es múltiplo de 3, pero no de 2. 132 es múltiplo de 11.

Identificas si un número es primo o compuesto

8 Averigua si los números 137 y 391 son primos o compuestos.

137 es primo.

391 no lo es, pues $391 = 17 \cdot 23$.

Descompones un número en factores primos y obtienes el m.c.m. y el M.C.D.

9 Descompón en factores primos y calcula:

a) m.c.m (18, 30), M.C.D. (18, 30)

m.c.m. $(18, 30) = 2 \cdot 3^2 \cdot 5 = 90$

M.C.D. $(18, 30) = 2 \cdot 3 = 6$

b) m.c.m. (180, 756), M.C.D. (180, 756)

m.c.m. $(180, 756) = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7 = 3\,780$

M.C.D. $(180, 756) = 2^2 \cdot 3^2 = 36$

c) m.c.m. (5, 10, 15), M.C.D. (5, 10, 15)

m.c.m. $(5, 10, 15) = 2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$

M.C.D. $(5, 10, 15) = 5$

d) m.c.m. (3, 6, 8), M.C.D. (3, 6, 8)

m.c.m. $(3, 6, 8) = 2^3 \cdot 3 = 24$

M.C.D. $(3, 6, 8) = 1$

Resuelves problemas de divisibilidad

10 En unos almacenes reciben ropa cada 6 días y juguetes cada 14 días. Hoy han coincidido los dos tipos de mercancía. ¿Cuántas veces volverán a coincidir en los próximos 100 días?

Coincidirán dentro de 42 y de 84 días, ya que m.c.m. (6, 14) = 42.

11 Rita ha comprado chicles de 15 céntimos y caramelos de 20 céntimos. ¿Cuánto se ha gastado, como mínimo si ha empleado la misma cantidad de dinero en las dos clases de golosinas?

Como m.c.m. (15, 20) = 60, Rita se ha gastado 60 céntimos en cada golosina como mínimo.

12 En una cafetería tienen dos depósitos: uno contiene 125 L de refresco de limón y otro 100 L de horchata. Se ha transvasado el contenido de ambos a otros dos recipientes iguales, empleando un bidón de la mayor capacidad posible para hacer el menor número de transvases. En cada transvase el bidón siempre se ha llenado por completo. ¿Cuántos litros entran en él?

Como M.C.D. (100, 125) = 25, los recipientes deberán tener una capacidad de 25 L.