

Objetivos

- 1 Identificar relaciones de divisibilidad entre números naturales y reconocer si un número es múltiplo o divisor de otro número dado.
- 2 Utilizar los criterios de divisibilidad por 2, 3, 5, 10 y 11 y utilizarlos para la factorización de un número.
- 3 Distinguir si un número es primo o compuesto.
- 4 Hallar múltiplos y divisores de un número dado.
- 5 Conocer los conceptos de M.C.D. y m.c.m. de dos o más números y dominar estrategias para su obtención.

Criterios de evaluación

- 1 Reconocer si un número es múltiplo o divisor de otro.
- 2 Obtener los divisores de un número.
- 3 Iniciar la serie de múltiplos de un número.
- 4 Determinar si un número es primo o compuesto.
- 5 Descomponer números en factores primos.
- 6 Obtener el M.C.D. y el m.c.m. de dos o más números.
- 7 Resolver problemas de divisibilidad en contextos reales, con la aplicación de múltiplo, divisor, M.C.D. y m.c.m.

Contenidos

Conceptos

- Relación de divisibilidad.
- Múltiplos y divisores.
- Números primos y compuestos.
- Criterios de divisibilidad.
- Cálculo de los divisores y los múltiplos de un número.
- Descomposición factorial de un número.
- Máximo común divisor y mínimo común múltiplo de dos números.

Procedimientos

- Aplicación de criterios de divisibilidad para estudiar los múltiplos y divisores de un número.
- Cálculo de los múltiplos y divisiones de un número natural.
- Reconocimiento de números primos y compuestos.
- Descomposición de un número natural en factores primos.
- Cálculo del M.C.D. y del m.c.m. de dos o más números naturales.
- Identificación y resolución de problemas con el M.C.D. y/o el m.c.m. de dos números.

Actitudes

- Incorporación del lenguaje matemático y del cálculo a la forma de proceder habitual.
- Curiosidad e interés por enfrentarse a problemas de divisibilidad de números.
- Sensibilidad y gusto por la presentación ordenada y clara del proceso realizado para obtener el resultado.

COMPETENCIAS BÁSICAS	ACTIVIDADES
1. Competencia matemática	
1.1. Utilizar el pensamiento matemático para interpretar y describir la realidad, así como para actuar sobre ella.	3.2, 3.3, 4.5, 5.1, 5.5
1.2. Aplicar destrezas y desarrollar actitudes para razonar matemáticamente.	1.2, 1.4, 2.1-2.4, 3.2, 3.3, 4.1-4.4, 5.1-5.5
1.3. Comprender una argumentación matemática	1.4, 2.5, 5.5
1.4. Expresarse y comunicarse a través del lenguaje matemático.	1.1-1.4, 3.1-3.3, 4.2, 4.4, 5.2, 5.5
1.5. Utilizar e integrar el conocimiento matemático con otros tipos de conocimiento para obtener conclusiones, reducir la incertidumbre y enfrentarse a situaciones cotidianas de diferentes grados de complejidad.	4.5, 5.5
2. Competencia en el conocimiento y la interacción con el mundo físico	
2.3. Identificar modelos y usarlos para extraer conclusiones.	2.5, 3.2, 3.3, 4.1, 4.3, 4.5, 5.1-5.3, 5.5
4. Comunicación lingüística	
4.1. Emplear el lenguaje matemático de forma oral y escrita para formalizar el pensamiento.	1.1-1.4, 3.1, 4.5, 5.3, 5.5
4.2. Utilizar las leyes de matemáticas para expresar y comunicar ideas de un modo preciso y sintético.	4.2, 4.4, 5.2, 5.4
6. Autonomía e iniciativa personal	
6.1. Aplicar los procesos de resolución de problemas para planificar estrategias, asumir riesgos y controlar los procesos de toma de decisiones.	2.5, 3.2, 3.3, 4.5, 5.1, 5.3, 5.5
8. Aprender a aprender	
8.2. Ser capaz de comunicar de manera eficaz los resultados del propio trabajo.	3.1, 4.1, 4.3, 4.5, 5.5

1. Múltiplos y divisores de un número

- Los **múltiplos** de un número son los números que se obtienen multiplicando ese número por todos los números naturales.
- Un número es **divisor** de otro cuando la división del segundo entre el primero es exacta.
- Un número es **primo** si solo tiene dos divisores: el 1 y el propio número.
- Un número es **compuesto** si tiene más de dos divisores.

Para calcular todos los divisores de un número, lo dividimos entre todos los números naturales a partir del 1. Dejaremos de dividir cuando el cociente sea igual o menor que el divisor. Las divisiones exactas nos indican que el cociente y el divisor correspondientes son divisores de ese número.

Divisores de 18:

$$18 : 1 = 18 \quad 18 : 3 = 6$$

$$18 : 2 = 9 \quad 18 : 4 = 4, \text{ resto: } 2$$

Los divisores de 18 son 1, 2, 3, 6, 9 y 18.

1 Halla todos los divisores de:

a) 50

b) 27

c) 20

2 Halla los cinco primeros múltiplos de:

a) 28

c) 8

b) 15

d) 19

3 Completa las siguientes frases con la palabra múltiplo o divisor:

a) 5 es _____ de 65.

b) 126 es _____ de 21.

c) 8 es _____ de 128.

d) 36 es _____ de 9.

4 Completa la siguiente tabla:

Número	Divisores	Primo o compuesto
42		
15		
29		

1. Múltiplos y divisores de un número

Solucionario

- 1** a) 50: 1, 2, 5, 10, 25, 50
b) 27: 1, 3, 9, 27
c) 20: 1, 2, 4, 5, 10, 20
- 2** a) 28: 28, 56, 84, 112, 140
b) 15: 15, 30, 45, 60, 75
c) 8: 8, 16, 24, 32, 40
d) 19: 19, 38, 57, 76, 95
- 3** a) 5 es divisor de 65.
b) 126 es múltiplo de 21.
c) 8 es divisor de 128.
d) 36 es múltiplo de 9.

Número	Divisores	Primo o compuesto
42	1, 2, 3, 6, 7, 14, 21, 42	Compuesto
15	1, 3, 5, 15	Compuesto
29	1, 29	Primo

2. Criterios de divisibilidad

Podemos utilizar los siguientes **criterios de divisibilidad** para saber si un número es divisible por otro simplemente observando sus cifras, sin necesidad de hacer la división:

- **Divisible por 2:** si termina en cero o cifra par.
- **Divisible por 3:** si al sumar sus cifras obtenemos un múltiplo de 3.
- **Divisible por 5:** si termina en 0 o en 5.
- **Divisible por 10 o 100:** si termina en 0 o en 00, respectivamente.
- **Divisible por 11:** Si la diferencia entre la suma de las cifras que ocupan lugar par y la suma de las cifras que ocupan lugar impar da 0 o múltiplo de 11.

1 Indica y justifica por qué números son divisibles los siguientes:

a) 24

b) 45

a) 2541

2 Indica entre estos números los que son divisibles por 2:

56, 37, 25, 84, 30, 41

3 Indica entre estos números los que son divisibles por 3:

39, 72, 65, 94, 63, 14

4 Indica entre estos números los que son divisibles por 11:

1 001, 374, 528, 198, 425, 88

5 Agrupa los siguientes números atendiendo a estas categorías:

8, 32, 76, 54, 21, 93, 321, 65, 15, 66, 38, 100

- a) Son divisibles por 2 pero no por 3.
- b) Son divisibles por 3, pero no por 2.
- c) Son divisibles a la vez por 3 y 5.
- d) Son divisibles a la vez por 2 y 11.
- e) Son divisibles a la vez por 2 y 3.

2. Criterios de divisibilidad

Solucionario

- 1** *a)* Es divisible por 2 porque acaba en cifra par, y por 3 ya que la suma de sus cifras ($2 + 4 = 6$) es múltiplo de 3.
b) Es divisible por 3 porque la suma de sus cifras ($4 + 5 = 9$) es múltiplo de 3, y es divisible por 5 porque acaba en 5.
c) Es divisible por 3 porque la suma de sus cifras ($2 + 5 + 4 + 1 = 12$) es múltiplo de 3, y es múltiplo de 11 porque la diferencia entre la suma de las cifras que ocupan lugar par ($5 + 1 = 6$) y las que ocupan lugar impar ($2 + 4 = 6$) es 0.
- 2** Son divisibles por 2: 56, 84 y 30 porque acaban en cifra par o 0.
- 3** Son divisibles por 3 el 39 ($3 + 9 = 12$), el 72 ($7 + 2 = 9$) y el 63 ($6 + 3 = 9$), porque la suma de sus cifras es un múltiplo de 3.
- 4** Son divisibles por 11 los siguientes números: 1001, 374, 528, 198 y 88.
- 5** *a)* Son divisibles por 2 pero no por 3: 8, 76, 38 y 100.
b) Son divisibles por 3, pero no por 2: 21, 93, 321 y 15.
c) Son divisibles a la vez por 3 y 5: 15.
d) Son divisibles a la vez por 2 y 11: 66.
e) Son divisibles por a la vez por 2 y 3: 32, 54, 66.

3. Descomposición de un número en factores primos

Descomponer un número en factores primos es expresar dicho número como producto de factores primos.

Para descomponer un número en factores primos dividimos el número entre el menor número primo que sea posible.

Se siguen dividiendo igualmente los cocientes obtenidos entre el menor número primo hasta obtener la unidad.

Por ejemplo, descomponemos 30 en factores primos:

$$30 : 2 = 15$$

$$15 : 3 = 5$$

$$5 : 5 = 1$$

Expresamos 30 como producto de factores primos: $30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$

En la práctica se expresa así:

30	2
15	3
5	5
1	

1 Descompón estos números en productos de factores primos.

a) 78

|

$$78 = \underline{\hspace{2cm}}$$

b) 45

|

$$45 = \underline{\hspace{2cm}}$$

c) 150

|

$$15 = \underline{\hspace{2cm}}$$

d) 63

|

$$63 = \underline{\hspace{2cm}}$$

2 Indica a qué números corresponden estas descomposiciones factoriales:

a) $2 \cdot 3 \cdot 7 =$

d) $2^3 =$

b) $2^2 \cdot 3^2 =$

e) $3^2 \cdot 5 =$

c) $5 \cdot 7^2 =$

f) $3 \cdot 5 \cdot 11 =$

3 Completa los números que faltan en las siguientes descomposiciones en factores primos.

a) $420 = 2^2 \cdot \underline{\hspace{1cm}} \cdot 5 \cdot \underline{\hspace{1cm}}$

b) $180 = \underline{\hspace{1cm}} \cdot 3^2 \cdot \underline{\hspace{1cm}}$

3. Descomposición de un número en factores primos

Solucionario

$$\begin{array}{r|l} 78 & 2 \\ 39 & 3 \\ 13 & 13 \\ 1 & \end{array}$$

$$78 = 2 \cdot 3 \cdot 13$$

$$\begin{array}{r|l} 45 & 3 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

$$45 = 3^2 \cdot 5$$

$$\mathbf{2} \quad \mathbf{a)} \quad 2 \cdot 3 \cdot 7 = 42$$

$$\mathbf{b)} \quad 2^2 \cdot 3^2 = 36$$

$$\mathbf{c)} \quad 5 \cdot 7^2 = 245$$

$$\mathbf{3} \quad \mathbf{a)} \quad 420 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$$

$$\begin{array}{r|l} 150 & 2 \\ 75 & 3 \\ 25 & 5 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

$$150 = 2 \cdot 3 \cdot 5^2$$

$$\begin{array}{r|l} 63 & 3 \\ 21 & 3 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$$

$$63 = 3^2 \cdot 7$$

$$\mathbf{d)} \quad 2^3 = 8$$

$$\mathbf{e)} \quad 3^2 \cdot 5 = 45$$

$$\mathbf{f)} \quad 3 \cdot 5 \cdot 11 = 165$$

$$\mathbf{b)} \quad 180 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5$$

4. Mínimo común múltiplo y máximo común divisor

- El **mínimo común múltiplo (m.c.m.)** de varios números es el menor de los múltiplos comunes de dichos números.

Para calcularlo se descomponen los números en factores primos. El mínimo común múltiplo es el producto de los factores primos comunes y no comunes elevados al mayor exponente.

Ejemplo: Calculamos el m.c.m. de 20 y 18

$$\begin{array}{r|l} 20 & 2 \\ 10 & 2 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 18 & 2 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

$$20 = 2^2 \cdot 5$$

$$18 = 2 \cdot 3^2$$

$$\text{m.c.m. (20, 18)} = 2^2 \cdot 5 \cdot 3^2 = 180$$

- El **máximo común divisor (M.C.D.)** de varios números es el mayor de los divisores comunes.

Para calcularlo se descomponen los números en factores primos. El máximo común divisor es el producto de los factores primos comunes elevados al menor exponente.

Ejemplo: Calculamos el M.C.D. de 20 y de 18

$$\text{M.C.D. (20, 18)} = 2$$

- 1** Calcula los quince primeros múltiplos de 10 y 12.

Múltiplos de 10:

Múltiplos de 12:

¿Qué múltiplos tienen en común? ¿Cuál es el menor de sus múltiplos comunes?

- 2** Calcula el m.c.m. de los siguientes números:

a) 50 y 120

c) 60, 105 y 150

b) 4, 15 y 12

d) 90, 45 y 180

- 3** Halla todos los divisores de 21 y 35.

Divisores de 21:

Divisores de 35:

¿Cuál es el mayor de los divisores comunes?

- 4** Calcula el M.C.D. los siguientes números:

a) 20 y 25

c) 60, 75 y 90

b) 21 y 24

d) 45, 75 y 90

- 5** Imagina que quieres preparar hamburguesas vegetales para cenar. En el supermercado los bollos de hamburguesa vienen en paquetes de cuatro y las hamburguesas en paquetes de seis. ¿Cuántos paquetes tendrá que comprar de cada producto para comprar el mismo número de bollos que de hamburguesas?

4. Mínimo común múltiplo y máximo común divisor

Solucionario

1 Múltiplos de 10: 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90, 100, 110, 120, 130, 140, 150.

Múltiplos de 12: 12, 24, 36, 48, 60, 72, 84, 96, 108, 120, 132, 144, 156, 168, 180.

Los múltiplos en común son 60 y 120.

Y el menor de sus múltiplos comunes es 60.

2 a) $50 = 2 \cdot 5^2$

$$120 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$$

$$\text{m.c.m. (50 y 120)} = 2^3 \cdot 3 \cdot 5^2 = 600$$

b) $4 = 2^2$

$$15 = 3 \cdot 5$$

$$12 = 2^2 \cdot 3$$

$$\text{m.c.m. (4, 15 y 12)} = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 = 60$$

c) $60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$

$$105 = 3 \cdot 5 \cdot 7$$

$$150 = 2 \cdot 3 \cdot 5^2$$

$$\text{m.c.m. (60, 105 y 150)} = 2^2 \cdot 3 \cdot 5^2 = 300$$

d) $90 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5$

$$45 = 3^2 \cdot 5$$

$$180 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5$$

$$\text{m.c.m. (90, 45 y 180)} = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 = 180$$

3 Divisores de 21: 1, 3, 7, 21

Divisores de 35: 1, 5, 7, 35

El mayor de los divisores comunes es 7.

4 a) M.C.D. (20 y 25) = 5

b) M.C.D. (21 y 24) = 3

c) M.C.D. (60, 75 y 90) = $3 \cdot 5 = 15$

d) M.C.D. (45, 75 y 90) = $3 \cdot 5 = 15$

5 Hay que calcular el mínimo común múltiplo de 4 y de 6.

$$\text{m.c.m. (4 y 6)} = 2^2 \cdot 3 = 12$$

Tendría que comprar:

$$12 : 4 = 3 \text{ paquetes de bollos}$$

$$12 : 6 = 2 \text{ paquetes de hamburguesas}$$

5. Evaluación

Nombre _____ Apellidos _____

Curso _____ Fecha _____ Calificación _____

1 Indica, razonando, si estas frases son ciertas:

- a) 17 es divisor de 65.
- b) 112 es múltiplo de 14.
- c) 4 y 3 son divisores de 24.
- d) 7 y 5 son múltiplos de 35.

2 Completa la siguiente tabla aplicando los criterios de divisibilidad:

	2	3	5	10	11
4 213 es divisible por					
128 es divisible por					
45 135 es divisible por					
5 780 es divisible por					

3 Relaciona cada número con su descomposición en factores primos:

110	$2 \cdot 17$
98	$2 \cdot 5 \cdot 11$
225	$3^2 \cdot 5^2$
258	$2 \cdot 3 \cdot 43$
34	$2 \cdot 7^2$

4 Calcula el mínimo común múltiplo y el máximo común divisor de:

- a) 36 y 52
- b) 96 y 144

5 Raúl tiene una colección de 72 sellos. Los quiere colocar en un álbum de manera que cada página contenga el mismo número de sellos. Si en cada página caben un mínimo de 6 sellos y un máximo de 12, ¿De cuántas formas distintas puede colocar los sellos en el álbum?

Solucionario

- 1** a) No es cierto. Los divisores de 65 son 1, 5, 13 y 65.
 b) Es cierto. $14 \cdot 8 = 112$.
 c) Es cierto. Los divisores de 24 son: 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12 y 24.
 d) No es cierto. Son divisores de 35.

2	2	3	5	10	11
4 213 es divisible por					X
128 es divisible por	X				
45 135 es divisible por		X	X		
5 780 es divisible por	X		X	X	

- 3** $110 = 2 \cdot 5 \cdot 11$
 $98 = 2 \cdot 7^2$
 $225 = 3^2 \cdot 5^2$
 $258 = 2 \cdot 3 \cdot 43$
 $34 = 2 \cdot 17$

- 4** a) $36 = 2^2 \cdot 3^2$ m.c.m. (36 y 52) = $2^2 \cdot 3^2 \cdot 13 = 468$
 $52 = 2^2 \cdot 13$ M.C.D. (36 y 52) = $2^2 = 4$
- b) $96 = 2^5 \cdot 3$ m.c.m. (96 y 144) = $2^5 \cdot 3^2 = 288$
 $144 = 2^4 \cdot 3^2$ M.C.D. (96 y 144) = $2^4 \cdot 3 = 48$

- 5** En 12 páginas con 6 sellos.
 En 18 páginas con 4 sellos.
 En 9 páginas con 8 sellos.
 En 8 páginas con 9 sellos.
 En 6 páginas con 12 sellos.